

\* Tanım (örnek uzayının parçalanışı)

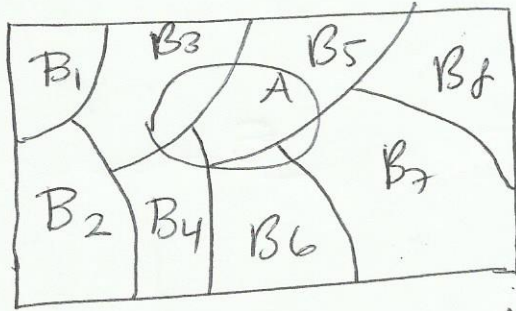
$i=1, 2, \dots, k$  için  $B_i$  olaylarının aşağıdaki özellikleri sağladığı düşünülür.

1.  $B_i \cap B_j = \emptyset \quad (i \neq j)$

2.  $\bigcup_{i=1}^k B_i = S$

3.  $P(B_i) > 0$  Bu durumda

$B_1, B_2, \dots, B_k$  olayları  $S$  örnek uzayının bir parçalanışını gösterir.  $k=f$  için aşağıdaki şekilde  $S$ 'nin parçalanışı gösterilmelidir.



Bir  $\mathbb{F}$  deneyi yapıldığında  $B_i$  olaylarından bir ve yalnız biri gerçekleşecektir. Örneğin bir zar deneyinde  $k=3$  için  $B_1 = \{1, 2\}$ ,  $B_2 = \{3, 4, 5\}$  ve  $B_3 = \{6\}$  olayları örnek uzayının bir parçalanışını gösterir.

Teorem:  $B_1, B_2, \dots, B_k$  sonlu bir  $S$  örnek uzayının parçalanışı ise

$$P(B_1) + \dots + P(B_k) = 1$$

İspat:

$B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_k = S$  olduğundan,

(A3) aksiyomu gereği,

$$P(B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_k) = P(B_1) + P(B_2) + \dots + P(B_k)$$

$$\Rightarrow P(S) = P(B_1) + P(B_2) + \dots + P(B_k)$$

$$-31- = 1 \text{ bulunur}$$

## Toplam Olasılık Formülü:

### Teorem

$B_1, B_2, \dots, B_k$  olayları bir  $S$  örnekle uzayının parçalanması ise  $S$ 'deki herhangi bir  $A$  olayı için

$$P(A) = \sum_{i=1}^k P(B_i) \cdot P(A/B_i)$$

dir.

İspat:  $A$  olayını şu şekilde yazabiliriz,  
 $A = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \dots \cup (A \cap B_k)$

Bazı  $A \cap B_i$ 'ler boş küme olabilir. Parçalanma özelliğinden;  $A \cap B_1, A \cap B_2, \dots, A \cap B_k$  olaylarının tümü ikiser ikiser ayrıktır. Ayrık olaylar için  $P(A)$  gereği

$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \dots + P(A \cap B_k) \quad (1)$$

$$\text{Ayrıca; } P(A/B_j) = \frac{P(A \cap B_j)}{P(B_j)}$$

$$\Rightarrow P(A \cap B_j) = P(A/B_j) \cdot P(B_j)$$

ifade edilir. (1) formülü yeniden yazılırsa,

$$P(A) = P(A/B_1) \cdot P(B_1) + P(A/B_2) \cdot P(B_2) + \dots + P(A/B_k) \cdot P(B_k) \quad (2)$$

bulunur.

Örnek: Bir depoda 20'şikusunlu 100 elektrik ampülü bulunuyor. Yerine koymaksızın 2 ampül seçiliyor. İkinci seçilen ampülün kusurlu olması olasılığı nedir.

Çözüm:  $B_1 = \{ \text{ilk seçilen kusurludur} \}$   
 $B_2 = \{ \text{" " " kusursuzdur} \}$   
 $A = \{ \text{ikinci " kusurludur} \}$

Olayları tanımlayalım.



$$\Rightarrow P(A) = P(B_1) \cdot P(A/B_1) + P(B_2) \cdot P(A/B_2) \\ = \frac{1}{5} \cdot \frac{19}{99} + \frac{4}{5} \cdot \frac{20}{99} = \frac{1}{5} \cdot \left( \frac{19}{99} + \frac{80}{99} \right) \\ = \frac{1}{5} \text{ bulunur.}$$

Örnek: Belli bir alet 3 fabrikada üretiliyor. 1 nolu fabrikada, hem 2 hemde 3 nolu fabrikaların üretimini 2 katı kadar alet ürettiği bilinmektedir. Yine bilinir ki 1 ve 2 nolu fabrikadaki üretimin 0,02 si, 3 nolu fabrikadaki üretimin 0,04'ü kusurludur. Tüm fabrikadaki üretimin 0,04'ü kusurludur. Tüm aletler bir depoya konuyor, rasgele seçilen bir aletin kusurlu olma olasılığı nedir?

Çözüm: Aşağıdaki olaylar tanımlansın,

$A = \{ \text{Alet kusurludur} \}$

$B_1 = \{ \text{Alet 1 nolu fabrikada üretiliyor} \}$

$B_2 = \{ \text{" 2 " " " " " } \}$

$B_3 = \{ \text{" 3 " " " " " } \}$

Seçilen bir aletin kusurlu olma olasılığı

$$P(A) = P(B_1) \cdot P(A/B_1) + P(B_2) \cdot P(A/B_2) + P(B_3) \cdot P(A/B_3)$$

Burada; (1' de 2 ve 3'ün 2 katı üretimi)

$$P(B_1) = \frac{1}{2}, \quad P(B_2) = P(B_3) = \frac{1}{4} \text{ dir.}$$

$$\text{Ayrıca } P(A/B_1) = P(A/B_2) = 0,02$$

$$P(A/B_3) = 0,04 \text{ veriliyor.}$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{1}{2} \cdot (0,02) + \frac{1}{4} \cdot (0,02) + \frac{1}{4} \cdot (0,04)$$

$$= 0,025 \text{ bulunur.}$$

(Seçilen aletin kusurlu olma olasılığı, %2,5 dir.)